104016 – אלגברה 1/מ
מבחן מועד א', אביב תשס"ז, 1.10.07

שם משפחה: _____ שם פרטי: _____

מספר סטודנט: | | | | | | | | |

קראו את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- אסור כל חומר עזר ואסור מחשבון.
- יש לענות רק על טופס המבחן. מחברות טיוטא לא יאספו.
- במבחן זה 12 שאלות ו- 15 תשובות נכונות. לכל שאלה יש לפחות תשובה אחת נכונה, אך לא יותר משתי תשובות נכונות. בנוסף ישנה שאלת שיעורי בית עליה יש לתת פתרון מלא.
- כל תשובה נכונה בטבלה ערכה 6 נקודות. ערכה של שאלת שיעורי הבית היא 10 נקודות.
- אין לסמן יותר מ- 15 סימונים בטבלת התשובות. על כל סימון בטבלה מעבר ל- 15 סימונים יורדו 6 נקודות.
- אין הורדת נקודות על תשובות לא נכונות, אלא רק על מספר סימונים חורג כמפורט בסעיף קודם.

טבלת תשובות

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
א												
ב												
ג												
ד												

ביקורת:

מספר ה- X שסימנתי: ☐

לשימוש הבודקים בלבד:

מספר סימונים	
מספר סימונים נכונים	
ציון על השאלות הסגורות	
ציון ש"ב	
ציון סופי	

בהצלחה ☺

שאלה 1

תהיינה A ו- B מטריצות מסדר 2×2 שונות מאפס כך ש- $AB\neq 0$ וגם $BA\neq 0$ אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(A)+rank(B)\geq 3$.

ב. $rank(A)\neq rank(B)$.

ג. $rank(AB)=rank(BA)$.

ד. $rank(A)+rank(B)=2$.

שאלה 2

תהי $A\in R^{4\times 5}$ מטריצה מדרגה 3. יהיו:

$$u=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad v=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad w=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

פתרונות למערכת $Ax=b$ אז בהכרח:

א. $\begin{pmatrix}3\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $Ax=b$.

ב. $\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $Ax=b$.

ג. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $Ax=0$.

ד. $b=0$.

שאלה 3

יהי V מרחב המטריצות הממשיות מסדר 3×3 ויהיו :

$U_1=\left\{A\in V \,\middle|\, A^t=-A\right\}$ (A^t מסמן את המוחלפת של A).

$U_2=\left\{A\in V \,\middle|\, trace(A)=0\right\}$

$U_3=\left\{A\in V \,\middle|\, AB^2=B^2A\right\}$ כאשר B מטריצה מסדר 3×3 נתונה

$U_4=\left\{A\in V \,\middle|\, rank(A)\le 2\right\}$

אז :

א. כל הקבוצות הן תתי מרחבים של V.

ב. U_3 אינו תת מרחב של V לכל מטריצה $B\neq 0$.

ג. $U_1\cup U_2$ הוא לא תת מרחב של V.

ד. $U_1\subset U_4$.

שאלה 4

נתונות המטריצות : $v_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}3&2\\3&2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}3&2\\0&0\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}2&2\\3&1\end{pmatrix}$

ב- $R^{2\times2}$, מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 .

אז :

א. $\dim sp\{v_2,v_3\}=1$.

ב. כל 3 מטריצות מתוך הארבע הנ״ל הן בלתי תלויות ליניארית.

ג. נגדיר U תת מרחב של R^{2x2} ממימד 2 המקיים : $U\cap sp\{v_1\}=U\cap sp\{v_2\}=\{0\}$ אז :

$U\oplus sp\{v_1,v_2\}=R^{2x2}$.

ד. $sp\{v_1,v_2,v_3\}=sp\{v_2,v_3,v_4\}$.

שאלה 5

יהי $V = R_4[x]$ (מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 4 עם מקדמים ממשיים), ויהי U תת המרחב הבא של V:

$$U = \{ p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0 \}$$

אזי:

א. $\dim U = 2$.

ב. $\dim U = 4$.

ג. $V = U \oplus R_1[x]$.

ד. $V = U + R_1[x]$ והסכום הוא לא סכום ישר.

שאלה 6

קבע אלו מההעתקות הבאות הן ליניאריות $T : R^{2\times 2} \to R^2$, כאשר T מוגדרת ע"י

א. $T(A) = \begin{pmatrix} \det(A) \\ 0 \end{pmatrix}$ כאשר $\det(A)$ היא הדטרמיננטה של A.

ב. $T(A) = \begin{pmatrix} tr(A) \\ 0 \end{pmatrix}$.

ג. $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\left(\begin{pmatrix} x & 8 \\ z-y & 1 \end{pmatrix}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$.

ד. $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\left(\begin{pmatrix} x & 8 \\ 0 & w \end{pmatrix}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 7

תהי $T:R_4[x]\to R^3$ כאשר $R_4[x]$ הוא מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 4 עם מקדמים ממשיים, טרנספורמציה ליניארית המוגדרת ע"י:

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4\right)=\begin{pmatrix}1&2&-7&0&0\\2&4&6&0&0\\0&0&0&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}$$

אז בהכרח מתקיים:

א. $KerT$ מכיל פולינום $f(x)\in R_4[x]$ בעל שורש -1.

ב. $KerT$ מכיל שני פולינומים $f(x),g(x)\in R_4[x]$ בת"ל בעלי שורש -1.

ג. לא קיים פולינום שונה מאפס $f(x)\in R_4[x]$ בגרעין של T בעל שורש -1.

ד. $\dim KerT=3$.

שאלה 8

תהא A מטריצה הפיכה מסדר 3×3 מעל למרוכבים ונתון כי $\det\left(A^{-1}\right)=1+i$ אז $\det\left(adj(A)\right)$ שווה ל:

א. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

ב. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{2}+i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$.

ג. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

ד. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{2}-i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$.

שאלה 9

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&a&0&b\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

אזי:

א. A לא לכסינה לכל ערך של a ו- b.

ב. אם $a=3$ אז A לכסינה לכל b.

ג. קיים ערך של a עבורו A לא לכסינה לכל b.

ד. אם A לא הפיכה אז A לא לכסינה.

שאלה 10

תהא A מטריצה ממשית מסדר 5×5 נתון כי קיים וקטור $v\in R^5$ שונה מאפס כך ש $Av=0$ ונתון כי $\lambda^4-13\lambda^2+36$ מחלק את הפולינום האופייני של A אז:

א. $trace(A^2)=26$.

ב. $trace(A^2)=0$.

ג. $trace(A^2)=13$.

ד. $trace(A)=\det(A)$.

שאלה 11

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל C $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ בסיס של V, ו- $T:V\to V$ אופרטור ליניארי, אז:

א. אם v_1 וקטור עצמי של T המקיים $<Tv_1\ ,\ v_1>=0$, אז T לא הפיך.

ב. אם u ו- v שני וקטורים ב- V כך ש- $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ אז u ו- v ניצבים זה לזה.

ג. אם v_1,v_2 הם שני וקטורים עצמיים השייכים לאותו ערך עצמי λ כך ש- $T(v_1)$ אורתוגונלי ל- $T(v_2)$ אז גם v_1 ניצב ל- v_2.

ד. אם $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ מתקבלים מ- $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ ע"י ביצוע תהליך גרם-שמיט ואם $w\in sp\{v_1,v_2,v_3\}$ אז $w\in sp\{u_1,u_2,u_3\}$.

שאלה 12

יהי $V = R^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 עם מכפלה פנימית סטנדרטית:

$\langle A,B\rangle = trace(B^t A)$ ויהי W תת המרחב הבא של V:

$$W = sp\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

אז:

א. $\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של W.

ב. $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של W.

ג. $W^{\perp} = sp\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right\}$.

ד. $W^{\perp} = sp\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\right\}$.

שאלת שיעורי הבית:

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס למרחב וקטורי V ממימד $n \ge 2$ ואם $T: V \to V$ העתקה ליניארית המקיימת $T(v_j) = v_1 + v_2 + \dots + v_j$ לכל v_j ($j = 1, 2, \dots, n$) אז T לא לכסינה.

ב. אם A מטריצה הפיכה שאיבריה מספרים שלמים ואם גם האיברים של A^{-1} הם מספרים שלמים אז הדטרמיננטה של A^{2008} שווה ל- 1.

דף ריק למקרה הצורך

דף מעקב לנבחן

104016 – אלגברה 1/מ
מבחן מועד א', אביב תשס"ז, 1.10.07

שם משפחה: _____ שם פרטי: _____

מספר סטודנט: | | | | | | | | |

קראו את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- אסור כל חומר עזר ואסור מחשבון.
- יש לענות רק על טופס המבחן. מחברות טיוטא לא יאספו.
- במבחן זה 12 שאלות ו- 15 תשובות נכונות. לכל שאלה יש לפחות תשובה אחת נכונה, אך לא יותר משתי תשובות נכונות. בנוסף ישנה שאלת שיעורי בית עליה יש לתת פתרון מלא.
- כל תשובה נכונה בטבלה ערכה 6 נקודות. ערכה של שאלת שיעורי הבית היא 10 נקודות.
- אין לסמן יותר מ- 15 סימונים בטבלת התשובות. על כל סימון בטבלה מעבר ל- 15 סימונים יורדו 6 נקודות.
- אין הורדת נקודות על תשובות לא נכונות, אלא רק על מספר סימונים חורג כמפורט בסעיף קודם.

טבלת תשובות

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
א												
ב												
ג												
ד												

ביקורת:

מספר ה- X שסימנתי: ☐